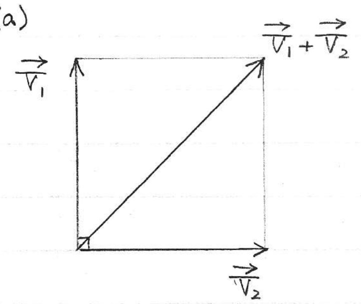
(注) 最後の答は，原則として3桁で記すことにする．

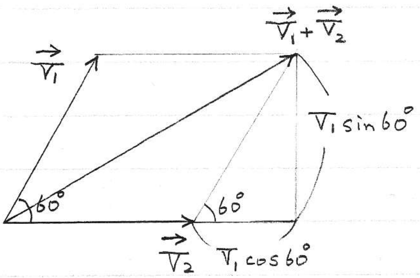
1.6 A 平面・空間での運動(その1) —— ベクトル，力と速度の合成 $\boxed{A}$

88. (a)



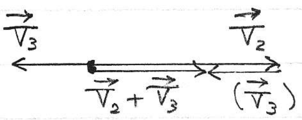
$$\vec{V}=\vec{V_1}+\vec{V_2}$$
$$V=\sqrt{V_1^2+V_2^2}=\sqrt{5^2+5^2}$$
$$=5\sqrt{2}\cong 7.07$$

(b)



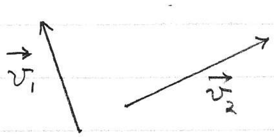
$$\vec{V}=\vec{V_1}+\vec{V_2}$$
$$V^2=(V_2+V_1\cos 60^\circ)^2+(V_1\sin 60^\circ)^2$$
$$=V_1^2(1+2\cos 60^\circ+\cos^2 60^\circ+\sin^2 60^\circ)\quad(\because V_2=V_1)$$
$$=V_1^2(1+2\cos 60^\circ+1)$$
$$=2V_1^2(1+\cos 60^\circ)$$
$$=2\times 5^2(1+\cos 60^\circ)$$
$$=75$$
$$\therefore\ V=\sqrt{75}=5\sqrt{3}\cong 8.66$$

(c)



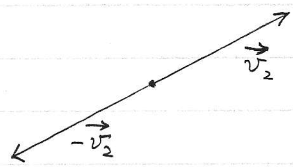
$$\vec{V}=\vec{V_2}+\vec{V_3}$$
$$V=V_2-V_3=5-2=3$$

89.



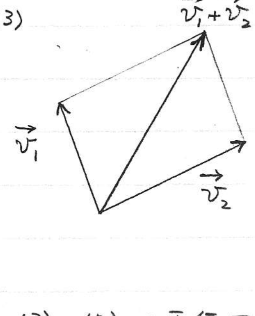
(1)

(2)

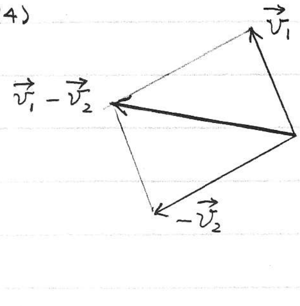


(1)と(2)は 向きは逆向きで，大きさは等しいベクトル

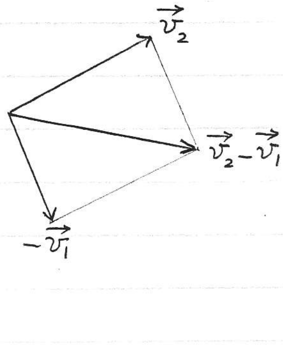
(3)



(4)

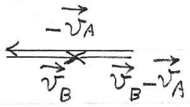


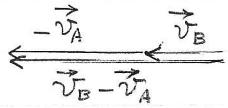
(5)

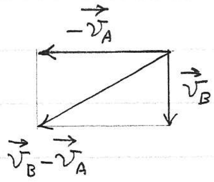


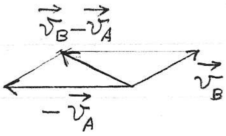
(3)~(5)は平行四辺形を用いる．

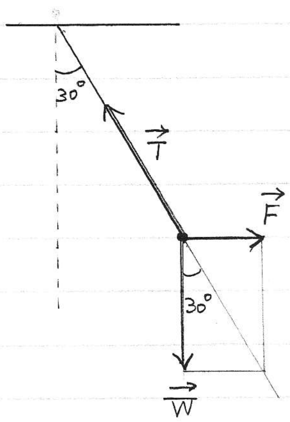
90. $\vec{v}_B - \vec{v}_A$ を作図すればよい。（Aから見ることは、Aを止めることに相当するので
$\vec{v}_A - \vec{v}_A$ で Aは止まる。同時に $\vec{v}_B$ から $\vec{v}_A$ を引けば Aから見たBの速度が作図できる）

(1)


(2)


(3)


(4)


91.


重力 $\vec{W}$、張力 $\vec{T}$、加える力 $\vec{F}$ がつり合っている。

$\tan 30^\circ = \dfrac{F}{W}$ であるから

$$F = W \tan 30^\circ = mg \tan 30^\circ$$
$$= 4\,\mathrm{kg} \times 9.8\,\mathrm{m/s^2} \times \tan 30^\circ$$
$$= 22.632\cdots\ \mathrm{N}$$
$$= 22.6\ \mathrm{N}$$

92. (1) 図から読み取ると、
$\vec{F}_1 = (3\mathrm{N},\ 5\mathrm{N})$
$\vec{F}_2 = (3\mathrm{N},\ -2\mathrm{N})$
$\vec{F}_3 = (1\mathrm{N},\ -5\mathrm{N})$
$\vec{F}_4 = (-6\mathrm{N},\ 3\mathrm{N})$

(2) x成分の和 $3\mathrm{N} + 3\mathrm{N} + 1\mathrm{N} - 6\mathrm{N} = 1\mathrm{N} = 1.00\mathrm{N}$

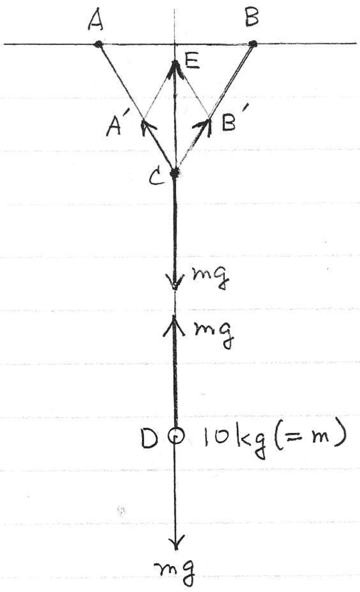
(3) y成分の和 $5\mathrm{N} - 2\mathrm{N} - 5\mathrm{N} + 3\mathrm{N} = 1\mathrm{N} = 1.00\mathrm{N}$

(4) 合力 $\vec{F} = (1\mathrm{N},\ 1\mathrm{N})$

大きさ $F = \sqrt{(1\mathrm{N})^2 + (1\mathrm{N})^2}$
$= \sqrt{2}\ \mathrm{N}$
$= 1.4142\cdots\ \mathrm{N}$
$= 1.41\ \mathrm{N}$

1.6A 平面・空間での運動(その1)——ベクトル, 力と速度の合成 $\boxed{B}$

93.



左図のように物体Dにかかる重力 mg が糸CDを介して点Cにかかっている。点Cには他に、糸ACと糸BCの力がかかっていて、これら3力はつり合っている。

ベクトルで表すと $|\overrightarrow{CE}| = mg$ で、$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{CB'}$ である。

ここで点A'は、点EからBCに平行な直線を引いたときのACとの交点である。点B'は、点EからACに平行な直線を引いたときのBCとの交点である。

$AB = AC = BC (= 1\,m)$ であるので、三角形ABCは正三角形である。

ABは水平であるから、CE(の延長)とABは直交している。

したがって、$\angle ECA' = \angle ECB' = 30°$ であり、$CA' = CB'$ である。

よって、四角形 CA'EB' はひし形となる。(幾何学的証明は省略)

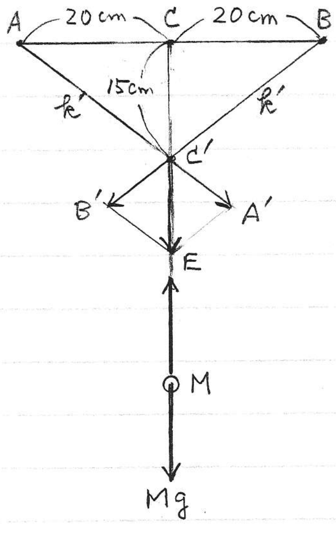
以上から、

$$CA' = \frac{\frac{1}{2}CE}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}mg}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}\times 10\,kg \times 9.8\,m/s^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= 56.580 \cdots N$$

$$= 56.6\,N$$

94. (下図は93.の図と似ているが、94.ではゴムひもの伸びに注目して力のベクトルを描いている)



ゴムひもを伸ばすことなく水平に張った状態を左図のACBとし、質量mの物体をつるした状態をAC'Bとする。

$AC = BC = 20\,cm$, $CC' = 15\,cm$ であるから三平方の定理より $AC' = BC' = 25\,cm$ である。

ここで、自然長20cmのゴムひもACが、力 $\overrightarrow{C'A'}$ がかかることにより、長さ $AC' (= 25\,cm)$ になったと考える。(右側もBCが力 $\overrightarrow{C'B'}$ により $BC' (= 25\,cm)$ になったと考える)

ゴムひもACの弾性定数を k' とする。

問題文前半で40cmのゴムひもに100gの物体をつるすと9.8cm伸びたとあるが、同じゴムひもを $20\,cm\ (= \frac{1}{2}\times 40\,cm)$ に切って100gの物体をつるすと、伸びは $4.9\,cm\ (= \frac{1}{2}\times 9.8\,cm)$ になる。

したがって、$k' \times 0.049\,m = 0.100\,kg \times 9.8\,m/s^2$ となり $k' = 20\,N/m$ である。

一方、$C'A' : \frac{1}{2}C'E = 5:3$ であるから、力 $\overrightarrow{C'A'}$ の大きさは $\frac{5}{3}\times\frac{1}{2}\times Mg$

以上から $20\,N/m \times 0.05\,m = \frac{5}{3}\times\frac{1}{2}\times M \times 9.8\,m/s^2$

$$\therefore M = 0.12244 \cdots kg$$

$$= 0.122\,kg$$

95. 「Bの自動車のAの自動車に対する相対速度」とは,「Aから見たBの速度」のことで,Aを止めたときのBの速度である。これをv_{AB}とすると,

$$v_{AB} = v_B - v_A = 50\,\mathrm{km/h} - 40\,\mathrm{km/h}$$
$$= 10\,\mathrm{km/h} = \frac{10 \times 1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 2.7777\cdots\,\mathrm{m/s}$$
$$= 2.78\,\mathrm{m/s}$$

12分後,すなわち 0.2時間後には,

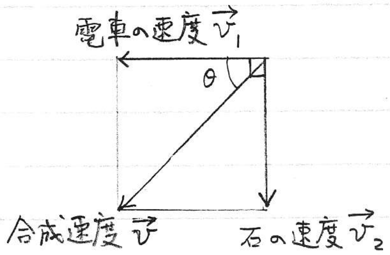
$$10\,\mathrm{km/h} \times 0.2\,\mathrm{h} = 2\,\mathrm{km} = 2000\,\mathrm{m}$$

離れている。

96. (1) $20\,\mathrm{m/s} + 10\,\mathrm{m/s} = 30\,\mathrm{m/s} = 30.0\,\mathrm{m/s}$ (電車の進行方向と同じ向き)

(2) $20\,\mathrm{m/s} - 10\,\mathrm{m/s} = 10\,\mathrm{m/s} = 10.0\,\mathrm{m/s}$ (電車の進行方向と同じ向き)

(3)※ 進行方向と垂直な面内のどの方向に投げても,石の速さ(電車の速度との合成された速度の大きさ)は等しいが,地上にいる人からどう見えるかは別の問題である。ここでは,地上にいる人に向かう方向の速度成分がない方向(電車が水平方向に進んでいるならば,鉛直方向)へ石を投げたと考える。 ※



$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ で,$\vec{v}_1$と$\vec{v}_2$は直交しているから

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{(20\,\mathrm{m/s})^2 + (20\,\mathrm{m/s})^2}$$
$$= \sqrt{800}\,\mathrm{m/s}$$
$$= 28.284\cdots\,\mathrm{m/s} = 28.3\,\mathrm{m/s}$$

角度は $\tan\theta = \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{20\,\mathrm{m/s}}{20\,\mathrm{m/s}} = 1$

$$\therefore \theta = 45^\circ = 45.0^\circ$$

1.6A 平面・空間での運動(その1) —— ベクトル，力と速度の合成 $\boxed{C}$

97. 川の流れの速度を $\vec{v}_1$，静水中の船の速度を $\vec{v}_2$，船が川の中を進む速度を $\vec{v}$ とする。
川の流れの方向（川上から川下への向き）を正とする。

(1) $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

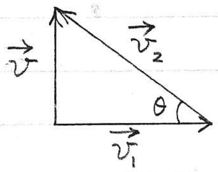
$\therefore\ v = 4\,\mathrm{m/s} - 5\,\mathrm{m/s} = -1\,\mathrm{m/s}$

$\therefore\ t = \dfrac{x}{v} = \dfrac{-100\,\mathrm{m}}{-1\,\mathrm{m/s}} = 100\,\mathrm{s}$

(2) $v = 4\,\mathrm{m/s} + 5\,\mathrm{m/s} = 9\,\mathrm{m/s}$

$\therefore\ t = \dfrac{x}{v} = \dfrac{180\,\mathrm{m}}{9\,\mathrm{m/s}} = 20\,\mathrm{s} = 20.0\,\mathrm{s}$

(3) ベクトルの図は下図のようである。



$\cos\theta = \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{4\,\mathrm{m/s}}{5\,\mathrm{m/s}} = 0.8$

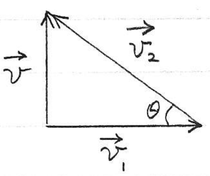
$\therefore\ \theta = 36.869\cdots°$

川上に向かって，川の流れとの角度 36.9° の向きにへさきを向ければよい。

(4) $v = \sqrt{v_2^2 - v_1^2} = \sqrt{(5\,\mathrm{m/s})^2 - (4\,\mathrm{m/s})^2} = 3\,\mathrm{m/s}$

$\therefore\ t = \dfrac{x}{v} = \dfrac{600\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{m/s}} = 200\,\mathrm{s}$

98. 川の流れの速度を $\vec{v}_1$，静水中の船の速度を $\vec{v}_2$，船が川の中を進む速度を $\vec{v}$ とする。
$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ であるから，ベクトルの図は下図のようである。



$\cos\theta = \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{2.4\,\mathrm{m/s}}{3.0\,\mathrm{m/s}} = 0.8$

$\therefore\ \theta = 36.869\cdots°$

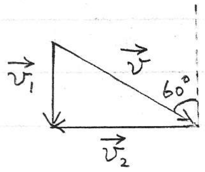
川上に向かって，川の流れとの角度 36.9° の向きにへさきを向ければよい。

$v = \sqrt{v_2^2 - v_1^2} = \sqrt{(3.0\,\mathrm{m/s})^2 - (2.4\,\mathrm{m/s})^2} = 1.8\,\mathrm{m/s}$

$\therefore\ t = \dfrac{x}{v} = \dfrac{90\,\mathrm{m}}{1.8\,\mathrm{m/s}} = 50\,\mathrm{s} = 50.0\,\mathrm{s}$

99. 地上から見た雨滴の速度を$\vec{v_1}$，電車の速度を$\vec{v_2}$，電車から見た雨滴の速度を$\vec{v}$とする。

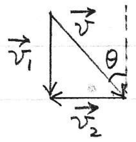
(1) ベクトルの図は下図のようである。



$$\tan 60^\circ = \frac{v_2}{v_1}$$

$$\therefore v_1 = \frac{v_2}{\tan 60^\circ} = \frac{72\,\mathrm{km/h}}{\sqrt{3}} = \frac{20\,\mathrm{m/s}}{\sqrt{3}} = 11.547\cdots\cdots\ \mathrm{m/s}$$
$$= 11.5\ \mathrm{m/s}$$

(2) ベクトルの図は下図のようである。



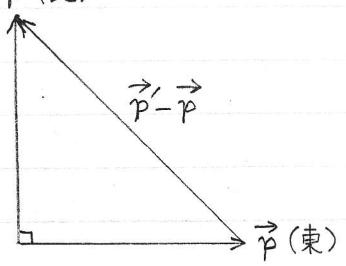
$$\tan\theta = \frac{v_2}{v_1} = \frac{36\,\mathrm{km/h}}{11.547\,\mathrm{m/s}} = \frac{10\,\mathrm{m/s}}{11.547\,\mathrm{m/s}} = 0.86602\cdots\cdots$$

$$\therefore \theta = 40.893\cdots^\circ$$

鉛直方向に対して 40.9°の角度で，電車の進行方向から降ってくる。

1.6B 平面・空間での運動（その2）――運動方程式，運動量，仕事 $\boxed{A}$

100.



左図のように，東向きの運動量 $\vec{p}=m\vec{v}$ が北向きの運動量 $\vec{p}'=m\vec{v}'$ のように変化したと考える．$|\vec{v}|=|\vec{v}'|$ であるから $|\vec{p}|=|\vec{p}'|$ である．運動量の変化 $\vec{p}'-\vec{p}$ は力積に等しいので，加える力積の大きさは，図より $\sqrt{|\vec{p}|^2+|\vec{p}'|^2}$ である．

$$|\vec{p}|=|\vec{p}'|=m|\vec{v}|=0.200\,\mathrm{kg}\times 10\,\mathrm{m/s}$$
$$=2\,\mathrm{kg\cdot m/s}$$

であるから

$$\sqrt{|\vec{p}|^2+|\vec{p}'|^2}=\sqrt{(2\,\mathrm{kg\cdot m/s})^2+(2\,\mathrm{kg\cdot m/s})^2}$$
$$=2\sqrt{2}\,\mathrm{kg\cdot m/s}$$
$$=2.8328\cdots\,\mathrm{kg\cdot m/s}=2.83\,\mathrm{N\cdot s}$$ （力積を求めているので単位はN・s）

向きは，図から北西である．

※ 上の解答にあいまいさを感じた人は，ベクトルの成分を用いるとよい．単位省略で，

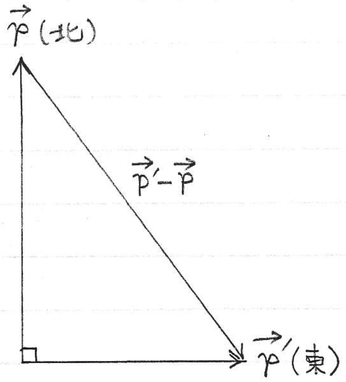
$$\begin{cases}\vec{p}=(2,0)\\ \vec{p}'=(0,2)\end{cases}$$

であるから，

$$\vec{p}'-\vec{p}=(0-2,\ 2-0)=(-2,\ 2)$$
$$\therefore |\vec{p}'-\vec{p}|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

以下，上の解答と同じ． ※

101.



運動量の変化の大きさを考える。

左図で $\vec{p'}-\vec{p}$ が運動量の変化を表している。

$|\vec{p}| = |m\vec{v}| = 1\,\mathrm{kg} \times 4\,\mathrm{m/s} = 4\,\mathrm{kg\cdot m/s}$

$|\vec{p'}| = |m\vec{v'}| = 1\,\mathrm{kg} \times 3\,\mathrm{m/s} = 3\,\mathrm{kg\cdot m/s}$

であるので、

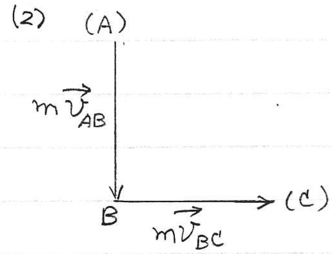
$$|\vec{p'}-\vec{p}| = \sqrt{|\vec{p}|^2+|\vec{p'}|^2} = \sqrt{(4\,\mathrm{kg\cdot m/s})^2+(3\,\mathrm{kg\cdot m/s})^2}$$
$$= 5\,\mathrm{kg\cdot m/s}$$
$$= 5.00\,\mathrm{kg\cdot m/s}$$

※ 運動の向きが西向きに変化したとしても大きさは等しい。 ※

1.6B 平面・空間での運動(その2) — 運動方程式, 運動量, 仕事 $\boxed{B}$

102. (1) 運動量は, 質量mと速度$\vec{v}$の積 $m\vec{v}$ で表される. mは一定であるので, $\vec{v}$が変化すれば運動量は変化する. この問題では速さは一定であるので, 速度の向きが変化した点で運動量が変化している. したがって, 点A, B, C, Dで運動量が変化している.

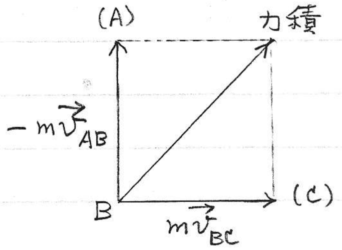
(2)



例えば点Bでの運動量の変化を考えてみる.
AB間の速度を$\vec{v}_{AB}$, BC間の速度を$\vec{v}_{BC}$とすると, 点Bでの運動量の変化は,

$$m\vec{v}_{BC} - m\vec{v}_{AB} = m(\vec{v}_{BC} - \vec{v}_{AB})$$

である. これが点Bで物体に与えられた力積に等しい.
これを図示すると左下図のようになる.

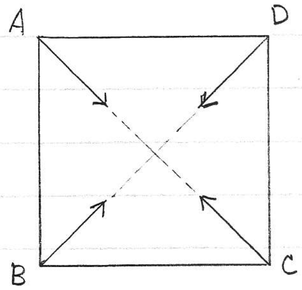


大きさは, 正方形の対角線の長さに相当する. 速さは一定で $|\vec{v}_{AB}| = |\vec{v}_{BC}| = v$ であるから, 大きさは,

$$\sqrt{2}mv$$

である.

点A, C, Dでも点Bと同様に考えて, 各点での力積の向きは左図のようであり, その大きさは $\sqrt{2}mv$ である.



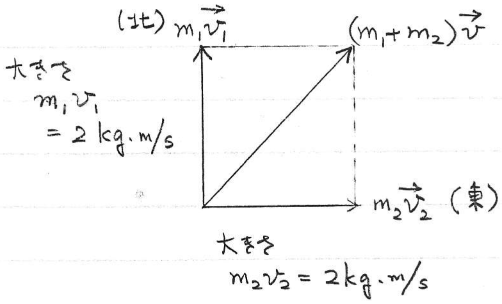
103. 北向きに進んできた物体の質量を $m_1(=1\,\mathrm{kg})$，速度を $\vec{v_1}$ （$v_1=2\,\mathrm{m/s}$）とし，
東向きに進んできた物体の質量を $m_2(=2\,\mathrm{kg})$，速度を $\vec{v_2}$ （$v_2=1\,\mathrm{m/s}$）とする．
衝突後の速度を $\vec{v}$ とすると，運動量保存則より，

$$m_1\vec{v_1}+m_2\vec{v_2}=(m_1+m_2)\vec{v}$$

が成り立つ．左辺のそれぞれの運動量の大きさは，

$$m_1v_1=1\,\mathrm{kg}\times2\,\mathrm{m/s}=2\,\mathrm{kg\cdot m/s}$$
$$m_2v_2=2\,\mathrm{kg}\times1\,\mathrm{m/s}=2\,\mathrm{kg\cdot m/s}$$

であるから，運動量のベクトル図は次のようになる．



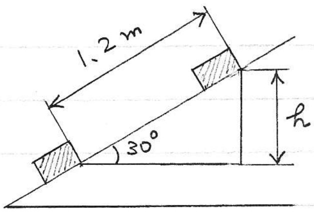
したがって，衝突後の物体の進む向きは，$(m_1+m_2)\vec{v}$ の向き．すなわち北東．
このベクトルの大きさは，

$$(m_1+m_2)v=2\sqrt{2}\,\mathrm{kg\cdot m/s}$$

であるから，速さは，

$$v=\frac{2\sqrt{2}\,\mathrm{kg\cdot m/s}}{1\,\mathrm{kg}+2\,\mathrm{kg}}$$
$$=0.94280\cdots\cdots\,\mathrm{m/s}$$
$$=0.943\,\mathrm{m/s}$$

104.

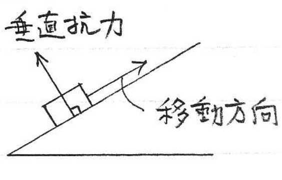


鉛直方向の移動距離 h は，左上図より

$$h=1.2\,\mathrm{m}\times\sin30^\circ$$
$$=0.6\,\mathrm{m}$$

重力の向きとは逆向きに動いているから，重力のした仕事は，

$$mg(-h)=0.20\,\mathrm{kg}\times9.8\,\mathrm{m/s^2}\times(-0.6\,\mathrm{m})$$
$$=1.176\,\mathrm{J}=1.18\,\mathrm{J}$$



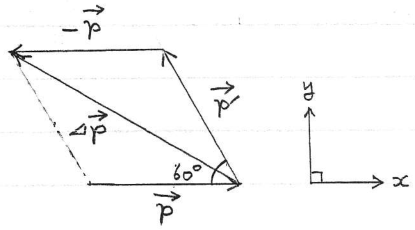
左下図のように，斜面の垂直抗力の向きは，物体の移動方向と直交している．（垂直抗力の移動方向の成分は 0 N である）
よって，斜面の垂直抗力のした仕事は 0 J（$=0.00\,\mathrm{J}$）である．

1.6B 平面・空間での運動（その2）—— 運動方程式，運動量，仕事 $\boxed{C}$

105. (1) 打ち返される前のボールの運動量を $m\vec{v}=\vec{p}$ 　打ち返された後のボールの運動量を $m\vec{v}'=\vec{p}'$ とする。 運動量の変化 $\Delta\vec{p}=\vec{p}'-\vec{p}=m\vec{v}'-m\vec{v}$ である。

$p=mv=0.4\,\mathrm{kg}\times 10\,\mathrm{m/s}=4\,\mathrm{kg\cdot m/s}$，$\vec{p}'=mv'=0.4\,\mathrm{kg}\times 10\,\mathrm{m/s}=4\,\mathrm{m/s}$ であるから，

$p=p'$ である。したがって，ベクトルの図は下図のようになる。



$\vec{p}$ の方向を x 方向として，左図のようにxy方向をとり，成分で考える。

$\vec{p}=(4,\ 0)$ 　（単位省略）

$\vec{p}'=(-4\times\cos 60^\circ,\ 4\times\sin 60^\circ)$

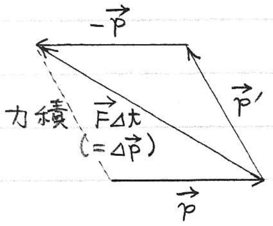
$\therefore\ \Delta\vec{p}=\vec{p}'-\vec{p}=(-4\times\cos 60^\circ-4,\ 4\times\sin 60^\circ)$

$=(-6,\ 2\sqrt{3})$

$\therefore\ \Delta p=\sqrt{(-6\,\mathrm{kg\cdot m/s})^2+(2\sqrt{3}\,\mathrm{kg\cdot m/s})^2}=6.9282\cdots\ \mathrm{kg\cdot m/s}$

$=6.93\ \mathrm{kg\cdot m/s}$

(2) 運動量の変化は力積に等しいので，(1)の図と結果を使うことができる。



$F\Delta t=6.93\ \mathrm{N\cdot s}$

106. (1) 衝突前の速さ $v=\dfrac{x}{t}=\dfrac{0.141\,\mathrm{m}}{0.1\,\mathrm{s}}=1.41\ \mathrm{m/s}$

衝突後の速さ $v'=\dfrac{x'}{t}=\dfrac{0.100\,\mathrm{m}}{0.1\,\mathrm{s}}=1.00\ \mathrm{m/s}$

(2) 衝突前の運動量 $p=mv=0.40\,\mathrm{kg}\times 1.41\,\mathrm{m/s}=0.564\ \mathrm{kg\cdot m/s}$

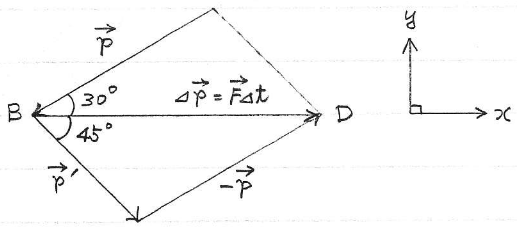
衝突後の運動量 $p'=mv'=0.40\,\mathrm{kg}\times 1.00\,\mathrm{m/s}=0.40\ \mathrm{kg\cdot m/s}=0.400\ \mathrm{kg\cdot m/s}$

（次ページに続く）

106. (続き)

(3) 運動量の変化 $\Delta\vec{p} = \vec{p}' - \vec{p} = m\vec{v}' - m\vec{v}$ = 力積 $\vec{F}\Delta t$

ベクトルの図は下図のようである。



壁の垂線 $\overrightarrow{BD}$ 方向に x 軸をとり，壁の面の上方向に y 軸をとる．以下，成分で考える．

$\vec{p} = (-0.564 \times \cos 30°,\ -0.564 \times \sin 30°)$ （単位省略）

$= (-0.48843\cdots,\ -0.282)$

$\vec{p}' = (0.400 \times \cos 45°,\ -0.400 \times \sin 45°)$ （単位省略）

$= (0.28284\cdots,\ -0.28284\cdots)$

$\therefore\ \Delta\vec{p} = \vec{p}' - \vec{p} = (0.28284 - (-0.48843),\ -0.28284 - (-0.282))$ （単位省略）

$= (0.77127,\ -0.0084)$ ……①

$\therefore\ \Delta p = \sqrt{(0.77127\ \mathrm{kg\cdot m/s})^2 + (-0.0084\ \mathrm{kg\cdot m/s})^2} = 0.77131\cdots\ \mathrm{kg\cdot m/s} = 0.771\ \mathrm{kg\cdot m/s}$

よって，$F\Delta t = 0.771\ \mathrm{N\cdot s}$

向きは ほぼ 壁に垂直で，BからDに向かう向き．（「ほぼ」とは ①で y 成分が0ではないからである）

(4) 力積 $= \bar{F}\Delta t$

$\therefore\ \bar{F} = \dfrac{力積}{\Delta t} = \dfrac{0.77131\cdots\ \mathrm{N\cdot s}}{0.04\ \mathrm{s}} = 19.282\cdots\ \mathrm{N}$

$= 19.3\ \mathrm{N}$

107. 分裂後の1kgの物体の速さを v_1，4kgの物体の速さを v_2 とする．ベクトルの図は下図のようである．

運動量保存則を書くと

初めの球の進行方向は，$5\mathrm{kg} \times 10\mathrm{m/s} = 1\mathrm{kg} \times v_1 \times \cos 30° + 4\mathrm{kg} \times v_2 \times \cos 60°$

$\therefore\ 50 = \frac{\sqrt{3}}{2} v_1 + 2v_2$ （単位省略） ……①

初めの球の進行方向と垂直な方向は，

$0\ \mathrm{kg\cdot m/s} = 1\mathrm{kg} \times v_1 \times \sin 30° - 4\mathrm{kg} \times v_2 \times \sin 60°$

$\therefore\ 0 = \frac{1}{2} v_1 - 2\sqrt{3}\, v_2$ （単位省略） ……②

①×$\sqrt{3}$ + ②

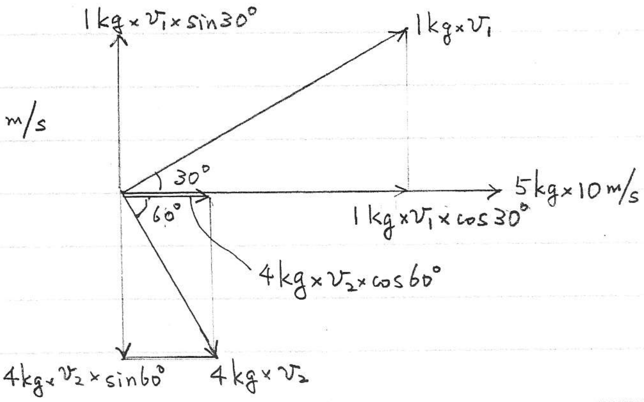
$50\sqrt{3} = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) v_1$

$\therefore\ v_1 = 25\sqrt{3} = 43.301\cdots = 43.3\ \mathrm{m/s}$

②に代入

$0 = \frac{1}{2} \times 25\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\, v_2$

$\therefore\ v_2 = \frac{25}{4} = 6.25\ \mathrm{m/s}$



108. 衝突後のAの速さをv_A，Bの速さをv_Bとする．ベクトルの図は下図のようである．
運動量保存則を書くと，

はじめのAの速度方向は，　$mv = mv_A\cos 30^\circ + mv_B\cos 60^\circ$

$$\therefore\ v = \frac{\sqrt{3}}{2}v_A + \frac{1}{2}v_B \quad \text{------①}$$

はじめのAの速度と垂直な方向は，　$0 = mv_A\sin 30^\circ - mv_B\sin 60^\circ$

$$\therefore\ 0 = \frac{1}{2}v_A - \frac{\sqrt{3}}{2}v_B \quad \text{------②}$$

①×$\sqrt{3}$＋②

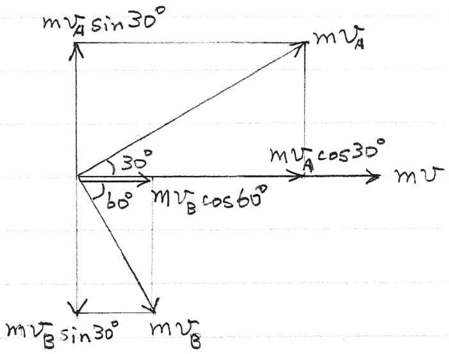
$$\sqrt{3}v = \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)v_A$$

$$\therefore\ v_A = \frac{\sqrt{3}}{2}v$$

②に代入

$$0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}v - \frac{\sqrt{3}}{2}v_B$$

$$\therefore\ v_B = \frac{1}{2}v$$



109. (1) 衝突前に運動していた小球の衝突後の速度をV_1'，衝突前に静止していた小球の衝突後の速度をV_2'とする．　$V_2' = V$であることから，衝突前後の運動は一直線上にあると考えられる．

運動量保存則より　$mV = mV_1' + mV_2'$

$$\therefore\ V = V_1' + V_2' \quad \text{------①}$$

弾性衝突であるから，運動エネルギーが保存されるので，

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mV_1'^2 + \frac{1}{2}mV_2'^2$$

$$\therefore\ V^2 = V_1'^2 + V_2'^2 \quad \text{------②}$$

①^2－②　$V^2 - V^2 = (V_1' + V_2)^2 - V_1'^2 - V_2'^2$

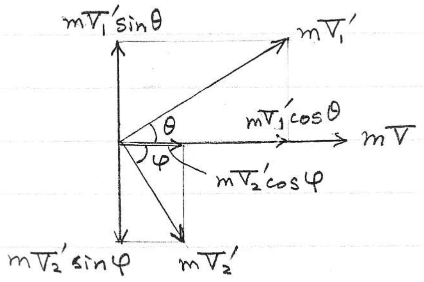
$$\therefore\ 0 = 2V_1'V_2'$$

もし，$V_2' = 0$ならば，　①より$V_1' = V$となるが，これは，速度Vで衝突した小球が，静止していた小球をすり抜けて同じ速度で進んでいったことを表している．このようなことは起こりえないので，$V_1' = 0$である．（静止する）

したがって，①より$V_2' = V$となる．

（次ページに続く）

109.（続き）(2) 運動量のベクトルの図は下図のようである。図のように角度θとφをとる。



運動量保存則より

$$\begin{cases} mV = mV_1'\cos\theta + mV_2'\cos\varphi \\ 0 = mV_1'\sin\theta - mV_2'\sin\varphi \end{cases}$$

mを消去して

$$\begin{cases} V = V_1'\cos\theta + V_2'\cos\varphi & \cdots\cdots ① \\ 0 = V_1'\sin\theta - V_2'\sin\varphi & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

弾性衝突であるので、運動エネルギーが保存して

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mV_1'^2 + \frac{1}{2}mV_2'^2$$

$$\therefore\ V^2 = V_1'^2 + V_2'^2 \quad \cdots\cdots ③$$

①^2+②^2

$$V^2 + 0^2 = V_1'^2\cos^2\theta + 2V_1'V_2'\cos\theta\cos\varphi + V_2'^2\cos^2\varphi + V_1'^2\sin^2\theta - 2V_1'V_2'\sin\theta\sin\varphi + V_2'^2\sin^2\varphi$$

$$\therefore\ V^2 = V_1'^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + V_2'^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + 2V_1'V_2'(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi)$$

$$\therefore\ V^2 = V_1'^2 + V_2'^2 + 2V_1'V_2'\cos(\theta+\varphi) \quad \cdots\cdots ④$$

④－③

$$V^2 - V^2 = V_1'^2 + V_2'^2 + 2V_1'V_2'\cos(\theta+\varphi) - V_1'^2 - V_2'^2$$

$$\therefore\ 2V_1'V_2'\cos(\theta+\varphi) = 0$$

ここで、$V_1' \neq 0$, $V_2' \neq 0$ であるから $\cos(\theta+\varphi) = 0$

$$\therefore\ \theta + \varphi = 90^\circ$$

1.6C 平面・空間での運動（その3）

——水平方向に投げ出したときの運動，斜めに投げたときの運動 $\boxed{A}$

110. (1) $y = \frac{1}{2}gt^2$

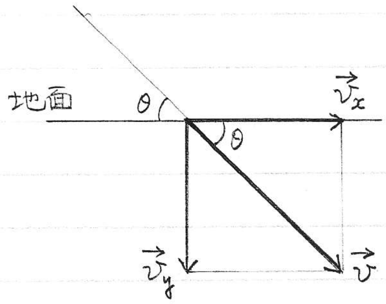
$$\therefore t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 10\,\mathrm{m}}{9.8\,\mathrm{m/s^2}}} = 1.4285\cdots\,\mathrm{s}$$
$$= 1.43\,\mathrm{s}$$

(2) $x = u_0 t = 14\,\mathrm{m/s} \times 1.43\,\mathrm{s} = 20.02\,\mathrm{m}$
$$= 20.0\,\mathrm{m}$$

(3) $v_x = u_0 = 14\,\mathrm{m/s}$

$v_y = gt = 9.8\,\mathrm{m/s^2} \times 1.43\,\mathrm{s} = 14.014\,\mathrm{m/s} = 14.0\,\mathrm{m/s}$

$$\therefore v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(14\,\mathrm{m/s})^2 + (14.014\,\mathrm{m/s})^2} = 19.808\cdots\,\mathrm{m/s}$$
$$= 19.8\,\mathrm{m/s}$$



地面とのなす角をθとすると，

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{14.0\,\mathrm{m/s}}{14\,\mathrm{m/s}} = 1.0$$

$\therefore \theta = 45°$

111. (1) 水平に投げた場合の鉛直方向の運動は自由落下と同じ式で表される．
落下距離は　$y = \frac{1}{2}gt^2$ で表され，$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$ であるから，AとBは同時に地上に達する．

(2) $$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 160\,\mathrm{m}}{9.8\,\mathrm{m/s^2}}} = 5.7142\cdots\,\mathrm{s}$$
$$= 5.71\,\mathrm{s}$$

(3) $x = u_0 t = 40\,\mathrm{m/s} \times 5.71\,\mathrm{s} = 228.4\,\mathrm{m}$
$$= 228\,\mathrm{m}$$

112. (1) 水平方向　$x = v_0 \cos\theta \cdot t = 30\,\mathrm{m/s} \times \cos 60^\circ \times 2.0\,\mathrm{s} = 30\,\mathrm{m}$
$= 30.0\,\mathrm{m}$

鉛直方向　$y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = 30\,\mathrm{m/s} \times \sin 60^\circ \times 2.0\,\mathrm{s} - \frac{1}{2} \times 9.8\,\mathrm{m/s^2} \times (2.0\,\mathrm{s})^2$
$= 32.361\cdots\,\mathrm{m} = 32.4\,\mathrm{m}$

(2) 水平方向　$v_x = v_0 \cos\theta = 30\,\mathrm{m/s} \times \cos 60^\circ = 15\,\mathrm{m/s}$
$= 15.0\,\mathrm{m/s}$

鉛直方向　$v_y = v_0 \sin\theta - g t = 30\,\mathrm{m/s} \times \sin 60^\circ - 9.8\,\mathrm{m/s^2} \times 2.0\,\mathrm{s} = 6.3807\cdots\,\mathrm{m/s}$
$= 6.38\,\mathrm{m/s}$

1.6C 平面・空間での運動（その3）

—— 水平方向に投げ出したときの運動，斜めに投げたときの運動 $\boxed{B}$

113. (1) 鉛直方向の位置は，$y=\frac{1}{2}gt^2$ で表される．$t=1\,s$ とすると，

$$y=\frac{1}{2}\times 9.8\,m/s^2\times(1\,s)^2$$
$$=4.9\,m$$

であるから，縦軸の1目盛は 4.90 m である．

(2) 水平方向には，1秒間で3目盛 $=5\,m\times 3=15\,m$ 移動している．

水平方向の位置は $x=v_0t$ で表される．

よって，$v_0=\dfrac{x}{t}=\dfrac{15\,m}{1\,s}=15\,m/s=15.0\,m/s$

(3) 2秒後の位置 P_2：$x=15\,m/s\times 2\,s=30\,m$，$y=\frac{1}{2}\times 9.8\,m/s^2\times(2\,s)^2=19.6\,m$

$=5\,m\times 6$　　$=4.90\,m\times 4$

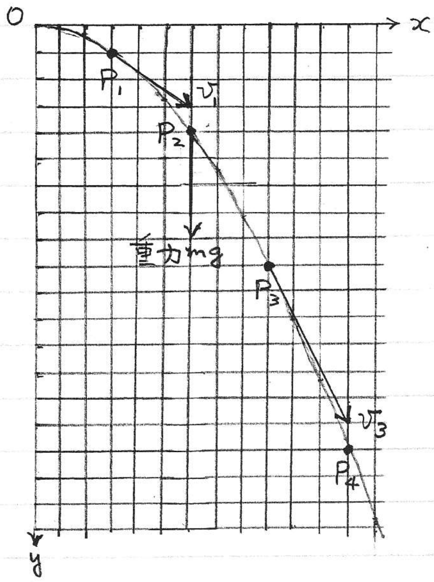
3秒後の位置 P_3：$x=15\,m/s\times 3\,s=45\,m$，$y=\frac{1}{2}\times 9.8\,m/s^2\times(3\,s)^2=44.1\,m$

$=5\,m\times 9$　　$=4.90\,m\times 9$

4秒後の位置 P_4：$x=15\,m/s\times 4\,s=60\,m$，$y=\frac{1}{2}\times 9.8\,m/s^2\times(4\,s)^2=78.4\,m$

$=5\,m\times 12$　　$=4.90\,m\times 16$

以上を図示する．また，O, P_1, P_2, P_3, P_4 を滑かな曲線でつなぐ．



(4) $OP_3=\sqrt{(45\,m)^2+(44.1\,m)^2}=63.006\cdots m$

$=63.0\,m$

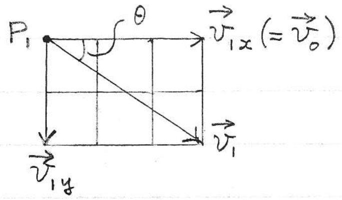
(5) 速度ベクトルの向きは，(3)で描いた曲線の接線方向である．ただし，大きさは，図の目盛りの単位が [m] で，速さが [m/s] であるので，描くことができない．

したがって，図中には向きだけ描くことにする．

傾きの計算は次ページに示すことにする．

（続く）

113. (5) (続き)



P_1 における速度 $\vec{v}_1$ の傾きを考える。
左図のように角度 θ をとると、

$$\tan\theta = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{gt_1}{v_0} = \frac{9.8\,m/s^2 \times 1\,s}{15\,m/s} = \frac{9.8}{15}$$

横軸目盛りが 5 m, 縦軸目盛りが 4.90 m であるので

$$\frac{9.8}{15} = \frac{4.90 \times 2}{5 \times 3} = \frac{縦\,2\,目盛り}{横\,3\,目盛り}$$

となる。 したがって, $\vec{v}_1$ は 横 3 目盛り 進む間に
縦 2 目盛り 進む矢印となる。(左図参照)

P_3 での 速度 $\vec{v}_3$ も同様に考えて,

$$\tan\theta = \frac{v_{3y}}{v_{3x}} = \frac{gt_3}{v_0} = \frac{9.8\,m/s^2 \times 3\,s}{15\,m/s} = \frac{4.90 \times 6}{5 \times 3} = \frac{縦\,6\,目盛り}{横\,3\,目盛り}$$

である。 したがって, $\vec{v}_3$ は, 横 3 目盛り進む間に 縦 6 目盛り進む矢印となる。

※ 前頁にも書いたが, 図の目盛りの単位は [m] で, 速度の単位は [m/s] である。図中の速度ベクトルの長さに意味はないが, 向き(傾き)は, 上のように計算できる。 ※

(6) 重力 mg が働いている。 これも (5) と同様に向き (鉛直下向き) のみ示すことができて, 大きさは図中に描けない。 (前ページの図参照)

(7) 速度の x 成分 $v_{3x} = v_0 = 15\,m/s$

y 成分 $v_{3y} = gt = 9.8\,m/s^2 \times 3\,s = 29.4\,m/s$

よって, $v = \sqrt{v_{3x}^2 + v_{3y}^2} = \sqrt{(15\,m/s)^2 + (29.4\,m/s)^2} = 33.005\cdots\,m/s$

$= 33.0\,m/s$

$$\tan\theta = \frac{v_{3y}}{v_{3x}} = \frac{29.4\,m/s}{15\,m/s} = 1.96$$

$\therefore\ \theta = 62.969\cdots°$

$= 63.0°$

114. (1) 物体を水平面との角度θで投げ上げたときの，物体の軌跡を表す式は，教科書43ページにあるように，

$$y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

である．地上に戻ったとき $y=0$ であるから，

$$0 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

$$\therefore \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x\right)x = 0$$

$x=0$ は出発点である．戻った地点は $x = \frac{2v_0^2\cos^2\theta}{g}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ である．

$$\therefore x = \frac{v_0^2}{g}\cdot 2\sin\theta\cos\theta = \frac{v_0^2}{g}\cdot\sin 2\theta$$

よって，$\theta = 45^\circ$ のとき最も遠くまで到達する．

(2) $$x = \frac{v_0^2}{g}\cdot\sin 2\theta = \frac{(20\ \mathrm{m/s})^2}{9.8\ \mathrm{m/s^2}}\cdot\sin(2\times 45^\circ) = 40.816\cdots\ \mathrm{m}$$
$$= 40.8\ \mathrm{m}$$

115. 衝突するまでの落下距離は2つの石ともに等しく $\frac{1}{2}gt^2$ である．

よって，$\frac{1}{2}gt^2 < 10\ \mathrm{m}$ ---- ①

一方，水平方向に投げられた石は，衝突までに水平方向に 20 m 進む．

よって $ut = 20\ \mathrm{m}$

$$\therefore t = \frac{20}{u}$$ （以下単位省略）

①に代入して

$$\frac{1}{2}g\left(\frac{20}{u}\right)^2 < 10$$

$$\therefore u^2 > 20g$$

$$\therefore u > \sqrt{20g} = \sqrt{20\times 9.8\ \mathrm{m/s^2}}$$
$$= 14\ \mathrm{m/s}$$
$$= 14.0\ \mathrm{m/s}$$

1.6 C 平面・空間での運動(その3)

―― 水平に投げ出したときの運動，斜めに投げたときの運動 $\boxed{C}$

116. (1) 投げたときの x 方向の速度を v_{0x}，y 方向の速度を v_{0y} とすると，

$$\begin{cases} v_{0x} = v\cos\theta & \cdots\cdots ① \\ v_{0y} = v\sin\theta & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

時刻 t のときの y 方向の速度を v_y とすると，

$$v_y = v_{0y} - gt = v\sin\theta - gt \quad \cdots\cdots ③$$

最高点では $v_y = 0$ であるから，③より，

$$0 = v\sin\theta - gt$$

$$\therefore \ t = \frac{v\sin\theta}{g} \quad \cdots\cdots ④$$

また，時刻 t のときの y 座標は

$$y = v\sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \cdots\cdots ⑤$$

であるから，⑤に④を代入して

$$h = v\sin\theta \cdot \frac{v\sin\theta}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v\sin\theta}{g}\right)^2$$

$$= \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$$

(2) 地面では，$y = 0$ であるから，⑤より

$$0 = v\sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore \ t\left(v\sin\theta - \frac{1}{2}gt\right) = 0$$

$$\therefore \ t = 0, \quad \frac{2v\sin\theta}{g}$$

$t = 0$ は投げた時刻であるから，地面に戻る時刻は $t = \dfrac{2v\sin\theta}{g}$ $\cdots\cdots ⑥$

時刻 t のときの x 座標は，

$$x = v_{0x}t = v\cos\theta\, t \quad \cdots\cdots ⑦$$

よって，⑦に⑥を代入して

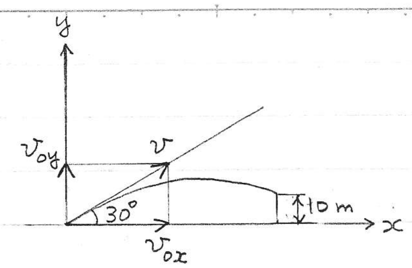
$$l = v\cos\theta \cdot \frac{2v\sin\theta}{g} = \frac{2v^2\cos\theta\sin\theta}{g} = \frac{v^2\sin 2\theta}{g} \quad \cdots\cdots ⑧$$

(3) ⑧を最大にする θ は $\sin 2\theta = 1$ のとき。

よって，$2\theta = 90°$

$$\therefore \ \theta = 45°$$

117.



(1) $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v\sin 30^\circ t - \frac{1}{2}gt^2$

ここで $y = 10\,\mathrm{m}$ とすると、

$10 = \frac{1}{2}vt - \frac{1}{2}gt^2$ （単位省略）

$\therefore\ t^2 - \frac{v}{g}t + \frac{20}{g} = 0$

これを t について解くと

$$t = \frac{\frac{v}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v}{g}\right)^2 - \frac{80}{g}}}{2}$$ （これは、高さ10 mの鉄柱の頂上に当たった時刻を求める式である） ----①

t は実数であるから、 $\left(\frac{v}{g}\right)^2 - \frac{80}{g} \geqq 0$ である。

$\therefore\ \left(\frac{v}{g}\right)^2 \geqq \frac{80}{g}$

$\therefore\ v^2 \geqq 80g$

$\therefore\ v \geqq 4\sqrt{5g} = 4 \times \sqrt{5 \times 9.8\,\mathrm{m/s^2}} = 28\ \mathrm{m/s}$ ----②

したがって、最小の初速度は $28.0\,\mathrm{m/s}$ である。

※ $\frac{v}{g} > \sqrt{\left(\frac{v}{g}\right)^2 - \frac{80}{g}}$ であるから、$t > 0$ である。したがって、$t \leqq 0$ になることを心配する必要はない。

①の複号は負号が上昇中に当たる場合、正号が下降中に当たる場合である。

②の最小値は、①の $\sqrt{\ }$ の中が0のときであるから、$t = \frac{v}{2g}$ で上昇中かつ下降中であり、つまり最高点ということである。 ※

(2) （問題文は(1)のときの投げた位置と鉄柱の水平距離を求めると読むことにする）

$$x = v_{0x}t = v\cos 30^\circ \cdot \frac{v}{2g} = \frac{v^2}{2g}\cos 30^\circ = \frac{(28\,\mathrm{m/s})^2}{2 \times 9.8\,\mathrm{m/s^2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 34.641\cdots\ \mathrm{m}$$

$$= 34.6\ \mathrm{m}$$

118. (1) $v_y = v_{0y} - gt = v\sin\alpha - gt$

最高到達点では, $v_y = 0$

よって,
$$0 = v\sin\alpha - gt$$
$$\therefore\ t = \frac{v\sin\alpha}{g}$$

$$\therefore\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$= v\sin\alpha\left(\frac{v\sin\alpha}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v\sin\alpha}{g}\right)^2$$
$$= \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}$$

これが最高到達点である。

水平到達距離は
$$x = v_{0x}t = v\cos\alpha\cdot t = v\cos\alpha\left(\frac{v\sin\alpha}{g}\right) = \frac{v^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\ \left(= \frac{v^2\sin 2\alpha}{2g}\right)$$

(2) $x = v\cos\alpha\cdot t$ から $t = \dfrac{x}{v\cos\alpha}$

これを $y = v\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$ に代入.

$$y = v\sin\alpha\cdot\frac{x}{v\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v\cos\alpha}\right)^2$$

$$\therefore\ y = f(x) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x - \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2\ \left(= \tan\alpha\, x - \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2\right) \quad \text{------①}$$

(3) 直線OAの式は $y = \tan\beta\, x$ ----②

①と②の交点を求める.

$$\tan\beta\cdot x = \tan\alpha\cdot x - \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2$$
$$\therefore\ x\left(\tan\alpha - \tan\beta - \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x\right) = 0$$
$$\therefore\ x = 0,\ \frac{2v^2\cos^2\alpha}{g}(\tan\alpha - \tan\beta)$$

$x = 0$ は投げ上げた点なので, Aのx座標は $\dfrac{2v^2\cos^2\alpha}{g}(\tan\alpha - \tan\beta)\ (= x_A)$

Aのy座標は ②より $\tan\beta\cdot\dfrac{2v^2\cos^2\alpha}{g}(\tan\alpha - \tan\beta)\quad (= y_A)$

以上から, $\overline{OA} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$
$$= \frac{2v^2\cos^2\alpha}{g}(\tan\alpha - \tan\beta)\sqrt{1 + \tan^2\beta}$$